

معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية: $\nabla^2 u = 0$ فاصل نظري الزاوية على -

حل معادلة لابلاس في حالة $u = u(r, \theta)$ كطرف

حل \sim داخل كرة نصف قطرها R هو

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cdot P_n(\cos \theta)$$

و حل معادلة لابلاس خارج الكرة هو:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} \cdot P_n(\cos \theta)$$

على أنه B_n, A_n ثوابت تتحدد بالشروط المعطاة
تاريخياً:

$$P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

تطبيقاً ٤٢١

أو حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية $\nabla^2 u = 0$

في الإحداثيات الكروية حالة

$$u = u(r, \theta)$$

داخل كرة نصف قطرها R ، المحقق الشرط الحدي

$$(1) \quad u|_{r=R} = \cos \theta$$

الحل:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

المعطى بالرسو الذي:

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta)$$

A_n ثابت اختياري

$$\cos \theta = A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 R P_1(\cos \theta) + \dots = A_0 + A_1 R \cos \theta + \dots$$

المطابقة

$$A_0 = 0, A_1 R = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{R}$$

دقيقة الثوابت معدومة

$$u(r, \theta) = A_1 r \cdot P_1(\cos \theta) = \frac{r}{R} \cos \theta$$

مثال (2) ٤٢٢

أو حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية حالة

داخل كرة نصف قطرها R ، المحقق الشرط الحدي التالي:

$$(u - u_r)|_{r=R} = \sin^2 \theta \quad (1)$$

الحل:

المعطى بالرسو الذي:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (2)$$

نشر العلاقة (2) بالنسبة ل r

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n-1} P_n(\cos \theta)$$

$$u - u_r = A_0 P_0(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} [r^n - n r^{n-1}] A_n P_n(\cos \theta) \quad (3)$$

باعتقاد أن الشرط Π خصل على

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [R^n - n R^{n-1}] \cdot A_n P_n(\cos \theta)$$

$$= A_0 + (R-1) A_1 \cos \theta + (R^2-2R) A_2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) + \dots$$

$$1 - \cos^2 \theta = A_0 + (R-1) A_1 \cos \theta + (R^2-2R) A_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

$$A_0 - \frac{R^2-2R}{2} A_2 = 1, \quad A_1 = 0$$

بالمطابقة:

$$\frac{3}{2} (R^2-2R) A_2 = -1 \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{3(R^2-2R)}$$

$$A_0 = \frac{R^2-2R}{2} \left(\frac{-2}{3(R^2-2R)} \right) + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} = A_0$$

نقية التوابيع معدومة

(الملاحظة 423) لنبدأ بالحدود (2) (n=0, 2) خصل على:

$$u(r, \theta) = A_0 + A_2 r^2 \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{2r^2}{3R^2-2R} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{r^2}{3(R^2-2R)} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

ملاحظة: 423

إذا أضيف الشرط الحدودية على حدود الكرة من أجل $R_1 < r < R_2$ وكانت هذه الشرط مغلقة بـ θ فقط عندئذٍ حل لمسألة لظروفية بحالة الحدوديات للكروية

$$u = u(r, \theta) \quad , \quad u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

تطبيق 423 دورة

أو حد حل صادرة لـ بلاس في الحدوديات للكروية (حالة $u = u(r, \theta)$) على أن:

$$u|_{r=1} = \cos^2 \theta, \quad u|_{r=2} = \frac{1}{8} (\cos^2 \theta + 1) \quad \dots (1)$$

الحل

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

من المعادلة (2) والشرط الأول خصل على

$$\cos^2 \theta = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n + B_n] \cdot P_n(\cos \theta)$$

عند تقعر $\cos^2 \theta$ تقف على حدود

$$= (A_0 + B_0) + (A_1 + B_1) \cos \theta + (A_2 + B_2) \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 + B_0 &= -\frac{1}{2} (A_2 + B_2) = 0 \\ (A_1 + B_1) &= 0 \\ \frac{3}{2} (A_2 + B_2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0 + B_0 &= \frac{1}{3} \quad \dots (1) \\ A_1 + B_1 &= 0 \quad \dots (2) \\ A_2 + B_2 &= \frac{2}{3} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

لأدلة العلاقة (2)، الشرط الثاني من الشرط الحدودية فصل على :

$$\frac{1}{8} \cos^2 \theta + \frac{1}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cdot 2^n + B_n \cdot 2^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

(معنى إيجاد الحدود عند $\cos^2 \theta = 1$)

$$= A_0 + \frac{B_0}{2} + (2A_1 + \frac{B_1}{4}) \cos \theta + (4A_2 + \frac{B_2}{8}) (\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2})$$

بالطريقة فصل على :

$$\left. \begin{aligned} (A_0 + \frac{1}{2} B_0) - \frac{1}{2} (4A_2 + \frac{1}{8} B_2) &= \frac{1}{8} \\ 2A_1 + \frac{B_1}{4} &= 0 \\ \frac{3}{2} (4A_2 + \frac{B_2}{8}) &= \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0 + \frac{B_0}{2} &= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \quad (4) \\ 2A_1 + \frac{B_1}{4} &= 0 \quad (5) \\ 4A_2 + \frac{B_2}{8} &= \frac{1}{12} \quad (6) \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{1}{3} - B_0$$

$$\frac{1}{3} - B_0 + \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{A_0 = 0} ; \boxed{A_1 = B_1 = 0}$$

$$A_2 = \frac{2}{3} - B_2 , \quad 4(\frac{2}{3} - B_2) + \frac{B_2}{8} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{8}{3} - 4B_2 + \frac{B_2}{8} = \frac{1}{12} , \quad -\frac{31}{8} B_2 = \frac{1}{12} - \frac{8}{3} = \frac{1-32}{12} = -\frac{31}{12}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{8}{12} \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{2}{3}} \Rightarrow A_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

نشر العلاقة (2) حالة $(n=0, 2)$ فصل على

$$n=0 \Rightarrow u(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + (A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3}) (\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2})$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

الترتيب لم يجد أي تبعية متبين ولهم تعري في حيزية هرفية، كل

رأ حرفة .
* حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) في الحالة العامة

$$u = u(r, \theta, \phi) \quad (1)$$

والحل للمعادلة داخل كوة نصف قطرها R

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta, \phi)$$

ر. ط. ح. كوة

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \phi)$$

على أنه

$$u(r, \theta) = a_0$$

على أن

$$u(r, \theta) = a_0 \cos \theta + (b_1 \cos \varphi + c_1 \sin \varphi) \sin \theta$$

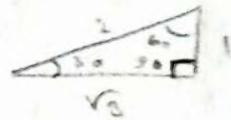
$$u_2(r, \theta) = a_2 (3 \cos^2 \theta - 1) + (b_2 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) \sin \theta \cos \theta + (d_2 \cos 2\varphi + e_2 \sin 2\varphi) \sin^2 \theta$$

نطبق

أوجد حل معادلة لابلاس داخل كرة نصف قطرها $R=1$ تحت الشروط الحدية التالية

$$u(r, \theta, \varphi) \Big|_{r=1} = \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin^2 \theta \quad (1)$$

$$\cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\text{القوس}}{\text{الوتر}}$$



$$\cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) \sin^2 \theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \varphi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots$$

$$(\frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi) \cdot \sin^2 \theta = a_0 + a_1 \cos \theta + (b_1 \cos \varphi + c_1 \sin \varphi) \sin \theta \cos \theta + a_2 (3 \cos^2 \theta - 1) + (b_2 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) \sin \theta \cos \theta + (d_2 \cos 2\varphi + e_2 \sin 2\varphi) \sin^2 \theta + \dots$$

بالمطابقة نجد أن

$$\left. \begin{aligned} a_0 - a_2 &= 0 \\ a_1 = b_1 = c_1 = b_2 = c_2 &= 0, a_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\boxed{d_2 = \frac{1}{2}, e_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$u(r, \theta, \varphi) = r^2 \cdot Y_2 = r^2 \left[\frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\varphi \right] \sin^2 \theta$$

$$u \Big|_{r=1} = \left[\cos 2\varphi \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\varphi \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right] \sin^2 \theta = \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin^2 \theta$$

سؤال ورقة 2014 / 2015 السؤال الرابع 20 درجة

أوجد حل معادلة لابلاس لدالة هارمونيك في الزوايا الحادة (θ, φ) خارج كرة نصف قطرها R و الحقة للشروط الحدية

$$(u - u_r) \Big|_{r=1} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) \quad (1)$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot Y_n(\theta, \varphi) \quad (2)$$

الحقة الحدية (2) بالسلسلة r

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)r^n}{r^{2n+2}} Y_n(\theta, \varphi)$$

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(n+1)}{r^{n+2}} Y_n(\theta, \varphi)$$

$$(u - u_r)|_{r=1} = \sin\theta \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) \equiv$$

$$\equiv Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (n+1)] Y_n(\theta, \varphi)$$

$$= Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) Y_n(\theta, \varphi)$$

$$\frac{1}{2} \sin\theta (1 + \cos\theta) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\varphi + \frac{1}{2} \cos\varphi \right] \equiv$$

$$\equiv Y_0 + 3Y_1 + 4Y_2 + \dots$$

$$\equiv a_0 + 3a_1 \cos\theta + 2(b_1 \cos\varphi + c_1 \sin\varphi) \sin\theta + 4a_2(3\cos^2\theta - 1)$$

$$+ 4(b_2 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi) \sin\theta \cos\theta + 4(d_2 \cos 2\varphi + e_2 \sin 2\varphi) \sin^2\theta +$$

نلاحظ

$$a_0 - 4a_2 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$3c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$3b_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\varphi + \frac{1}{4} \cos\varphi \right) \sin\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\varphi + \frac{1}{4} \cos\varphi \right) \sin\theta \cos\theta$$

نلاحظ

$$a_0 - 4a_2 = 0, a_1 = 0, 3c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, 3b_1 = \frac{1}{4}$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$4b_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{16}, 4c_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow c_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$(u - u_r)|_{r=1} = \sin\theta \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \sin(\varphi + \frac{\sqrt{3}}{16}) \dots (11)$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} Y_1 + \frac{1}{r^3} Y_2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{12} \cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin\varphi \right) \sin\theta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{16} \cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{16} \sin\varphi \right) \sin\theta \cos\theta$$

نلاحظ

$$\frac{\partial}{\partial x} [(x+y) \cdot u_y + u] = 2(x+y)$$

أثبت أنه لمعادلة المعطاة من إيفر لزاندي

$$u_y + (x+y) u_{xy} + u_x = 2(x+y)$$

الحل الخاص :

$$u|_{x=y} = y^2, \quad u_y|_{x=y} = 1+y \Rightarrow u_x = 2(x+y)$$

الحل :

ماتريشوية .. المادة سهلة كثير .. بدائنه سوفلو بملك

* تربيان حلولة 196 198 المسبقتين - الفصل الثاني - - - - - 2 -

$$u_{yy} + \frac{y}{(y^2+2x)} u_y = 0 \quad \text{و} \quad y = x+y, \quad y = y^2+x^2$$

الحل الخاص للمعادلة لم اوجد حل الخاص -

نفرض انه

لومني مع بيقر السؤال
مربع

$$u_y = v$$

$$u_{yy} = v_y$$

$$v_y + \frac{y}{(y^2+2x)} v = 0$$

بذلك

$$\frac{dv}{v} = \frac{-y}{y^2+2x} dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2y dy}{y^2+2x} \Rightarrow$$

$$\ln v = -\frac{1}{2} \ln(y^2+2x) \Rightarrow v = (y^2+2x)^{-\frac{1}{2}} \varphi(y)$$

$$\Rightarrow u_y = (y^2+2x)^{-\frac{1}{2}} \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y, y) = \int_0^y (y^2+2z)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z) dz + \varphi(y)$$

بالتالي الحل العام

$$u(x, y) = \int_0^{y^2+x^2} ((x+y)^2+2z)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z) dz + \varphi(x+y)$$

والمعادلة الشرطية

$$u|_{y=0} = x^3, \quad u_y|_{y=0} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = \int_0^{x^2} (x^2+2z)^{-\frac{1}{2}} \varphi(z) dz + \varphi(x) \quad \text{--- (1)}$$

$$u_y = [(x+y)^2 - 2(x^2+y^2)]^{-\frac{1}{2}} \psi(x^2+y^2) (2y) + \int_0^{y^2+x^2} -\frac{1}{2} [(x+y)^2 - 2(x^2+y^2)]^{-\frac{3}{2}} \psi(z) \cdot (2y) dz + \psi(x+y)$$

$$= -x \int_0^{x^2} [x^2 - 2z]^{-\frac{3}{2}} \psi(z) dz + \psi(x) \quad \text{--- (2)}$$

$$\textcircled{3} \dots 3x^2 = (x^2 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi(x^2) (2x) + \int_0^{x^2} -\frac{1}{2} (x^2 - 2z)^{-\frac{3}{2}} \psi(z) \cdot (2x) dz + \psi(x)$$

$$3x^2 = (-x)^{-1} \cdot \psi(x^2) (2x)$$

بالطرح

عندئذ في ①

$$\psi(x^2) = -\frac{3}{2} x^2$$

انتقلت للحاضرة مباشرة ١٥٩ -

والأخير - -

الدكتور، رح نجيب نظري، عالي -